33　面積（2）

基本問題 ＆ 解法のポイント

55

(1)

解法 **1**

$ay = x^2$ より，$a^2 y^2 = x^4$　・・・①

$ax = y^2$ より，$a^3 x = a^2 y^2$　・・・②

①を②に代入すると，$a^3 x = x^4$ すなわち $x\left(x^3 - a^3\right) = 0$

よって，$x(x-a)\left(x^2 + ax + a^2\right) = 0$

これと $x^2 + ax + a^2 = \left(x + \dfrac{a}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}a^2 > 0$ より，$x = 0,\ a$

よって，$(x,\ y) = (0,\ 0),\ (a,\ a)$

解法 **2**

$ay = x^2$ と $ax = y^2$ より，$a(y-x) = x^2 - y^2$ すなわち $x^2 - y^2 + a(x-y) = 0$

よって，$(x-y)(x+y)(x+y+a) = 0$

また，$ay = x^2 \geq 0$，$ax = y^2 \geq 0$，$a > 0$ より，$x + y + a > 0$

よって，$x = y$

したがって，$ax = x^2$ から，$(x,\ y) = (0,\ 0),\ (a,\ a)$

(2)

$ay = x^2$ と $ax = y^2$ は $y = x$ に関して対称だから，$y = \dfrac{x^2}{a}$ と $y = x$ で囲まれた部分の面積は $\dfrac{3}{2}$

よって，$\displaystyle\int_0^a \left(\frac{x^2}{a} - x\right)dx = \frac{3}{2}$

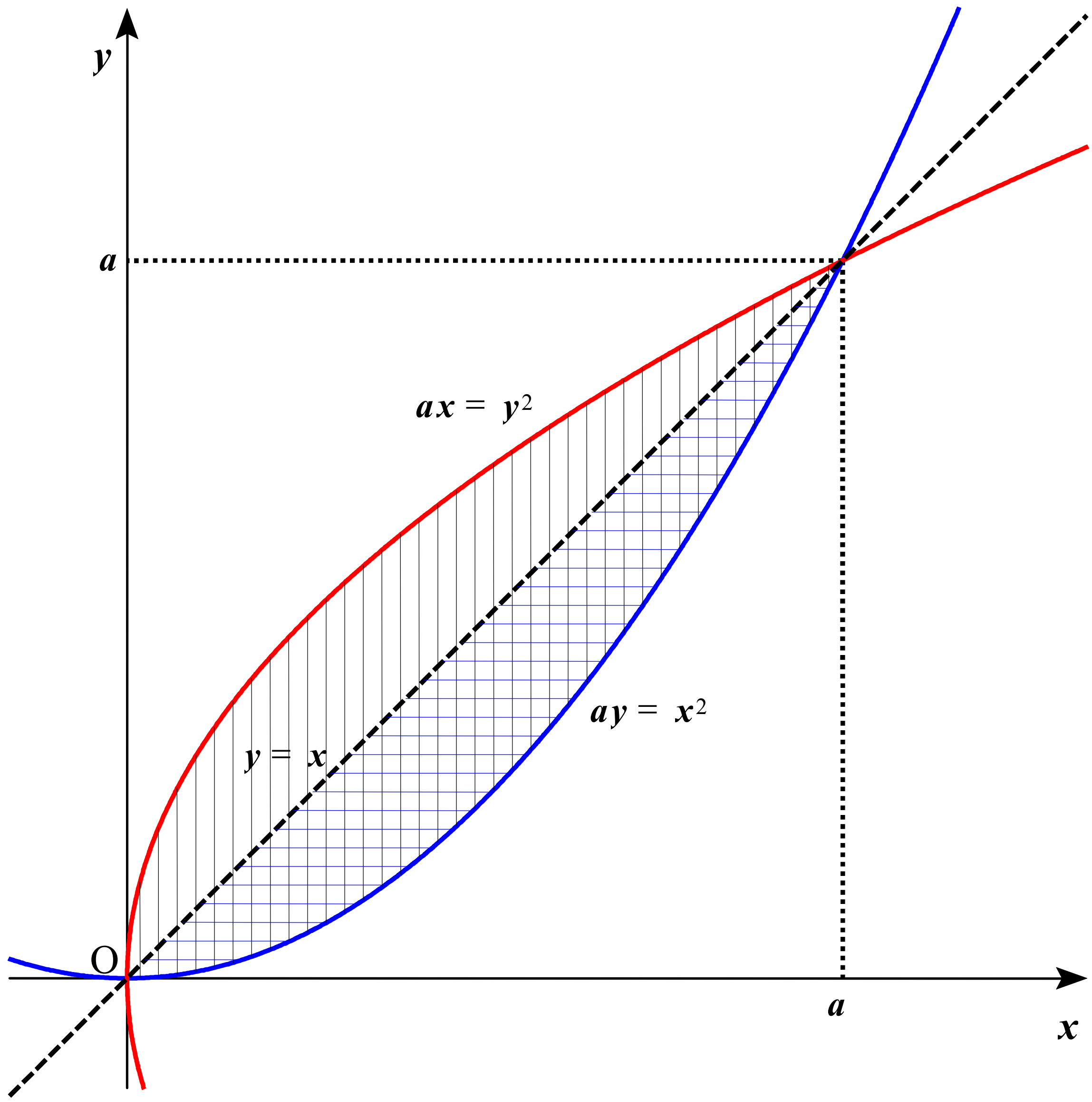
これと

$$\int_0^a \left(x - \frac{x^2}{a}\right)dx = -\frac{1}{a}\int_0^a x(x-a)dx$$
$$= \frac{a^3}{6a}$$
$$= \frac{a^2}{6}$$

より，

$$\frac{a^2}{6} = \frac{3}{2} \quad \therefore a = 3 \quad (\because a > 0)$$

参考図



問題 A

196

(1)

共有点の x 座標は $\sin 2x = p\sin x$ を満たすから，

$\sin 2x - p\sin x = 2\sin x\cos x - p\sin x = \sin x(2\cos x - p) = 0$

$\therefore \sin x = 0,\ \cos x = \dfrac{p}{2}$

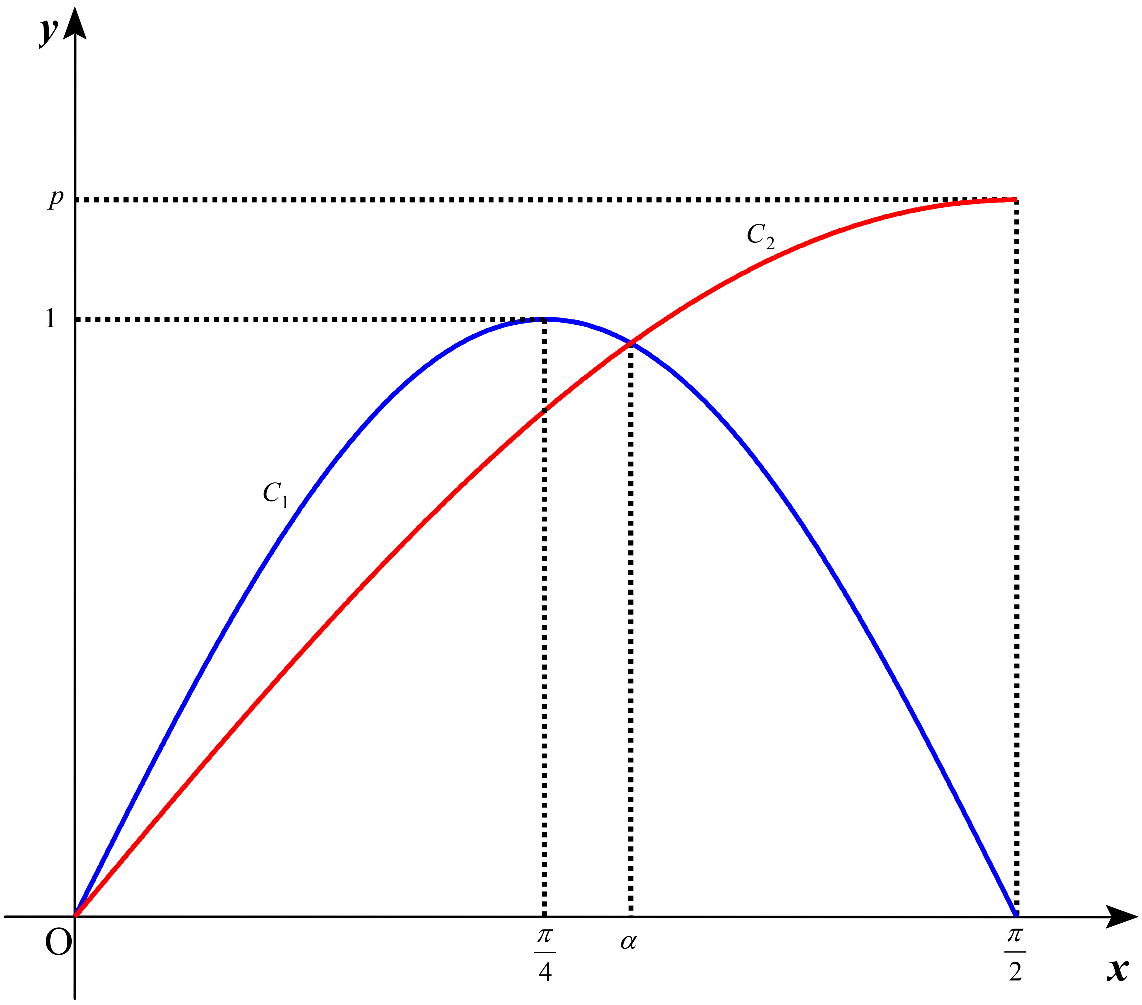
$\sin x = 0$ の解は $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ より， $x = 0$

よって，原点と異なる共有点の x 座標 α は $\cos\alpha = \dfrac{p}{2}$ を満たす。

ゆえに， $\cos\alpha = \dfrac{p}{2}$

(2)

C_1 と C_2 のグラフを描くと下図のようになる。



C_1 と x 軸で囲まれた領域の面積は $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = \left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

よって，$\int_0^{\alpha}(\sin 2x - p\sin x)dx = \frac{1}{2}$

これと

$$\begin{aligned}\int_0^{\alpha}(\sin 2x - p\sin x)dx &= \left[-\frac{1}{2}\cos 2x + p\cos x\right]_0^{\alpha} \\ &= -\frac{1}{2}\cos 2\alpha + p\cos\alpha + \frac{1}{2} - p \\ &= -\frac{1}{2}\left(-1 + 2\cos^2\alpha\right) + p\cos\alpha + \frac{1}{2} - p \\ &= -\cos^2\alpha + p\cos\alpha - p + 1 \\ &= -\left(\frac{p}{2}\right)^2 + p\cdot\frac{p}{2} - p + 1 \\ &= \frac{p^2}{4} - p + 1\end{aligned}$$

より，

$\frac{p^2}{4} - p + 1 = \frac{1}{2}$　すなわち $\frac{1}{4}\left(p^2 - 4p + 2\right) = 0$　$\therefore p^2 - 4p + 2 = 0$

これと，$0 < \cos\alpha = \frac{p}{2} \leq 1$ すなわち $0 < p \leq 2$ より，$p = 2 - \sqrt{2}$

197

面積を $S(t)$ とおく。

$t=0$ のとき

$\begin{cases} x^2+y^2 \leq 1 \\ x^2+y^2 \geq 1 \end{cases}$ の表す領域の面積だから，$S(0)=0$

$t=1$ のとき

$\begin{cases} x^2+y^2 \leq 0 \\ x^2+y^2 \geq 1 \end{cases}$ の表す領域の面積だから，$S(1)=0$

$0<t<1$ のとき

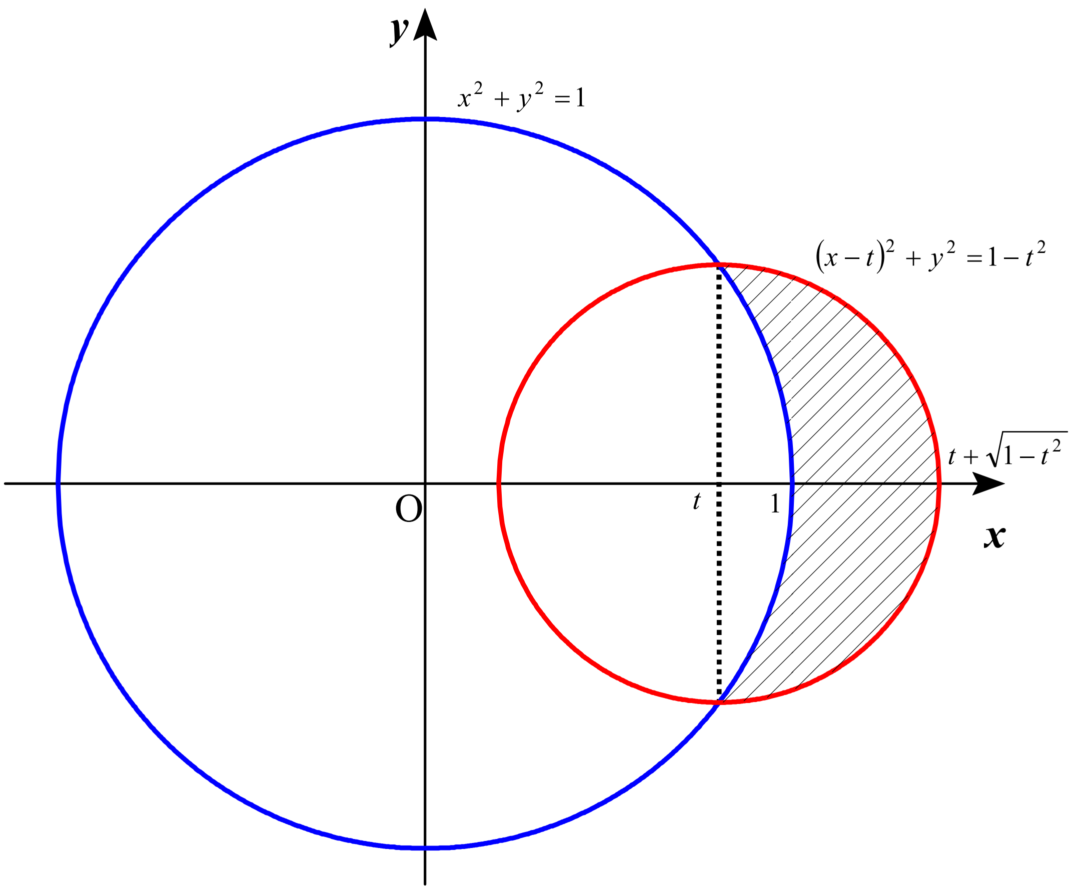
$(x-t)^2+y^2=1-t^2$ と $x^2+y^2=1$ の共有点の座標を求める。

$(x-t)^2+y^2=1-t^2$ を展開し整理すると，$x^2+y^2-1-2t(x-t)=0$

$x^2+y^2=1$ より，$x^2+y^2-1=0$ だから，$t(x-t)=0$　よって，$t \neq 0$ より，$x=t$

これより，$y=\pm\sqrt{1-t^2}$

よって，$\begin{cases} (x-t)^2+y^2 \leq 1-t^2 \\ x^2+y^2 \geq 1 \end{cases}$ の表す領域は下図斜線部（境界線を含む）



$\therefore S(t)=\dfrac{\pi\left(1-t^2\right)}{2}-2\displaystyle\int_t^1\sqrt{1-x^2}\,dx$

これより，$S'(t)=-\pi t+2\sqrt{1-t^2}$

$S'(t)=0$ の解，すなわち $-\pi t+2\sqrt{1-t^2}=0$ の解を求めると，

$2\sqrt{1-t^2}=\pi t$ より，$4\left(1-t^2\right)=\pi^2t^2$ すなわち $t^2\left(\pi^2+4\right)=4$ $\quad\therefore t=\dfrac{2}{\sqrt{\pi^2+4}}$ $\quad(\because 0<t<1)$

したがって，$S(t)$ の増減は次のようになる。

t	0	$\cdots$	$\dfrac{2}{\sqrt{\pi^2+4}}$	$\cdots$	1
$S'(t)$	/	$+$	0	$-$	/
$S(t)$	/	↑	極大	↓	/

以上より，

面積が最大になるときの t の値は $\dfrac{2}{\sqrt{\pi^2+4}}$

198

(1)

$\left(t,\ \dfrac{e^{a(t+2)}}{a}\right)$を接点とする接線の方程式を求めると，$y'=e^{a(x+2)}$より，

$$y=e^{a(t+2)}(x-t)+\frac{e^{a(t+2)}}{a}$$

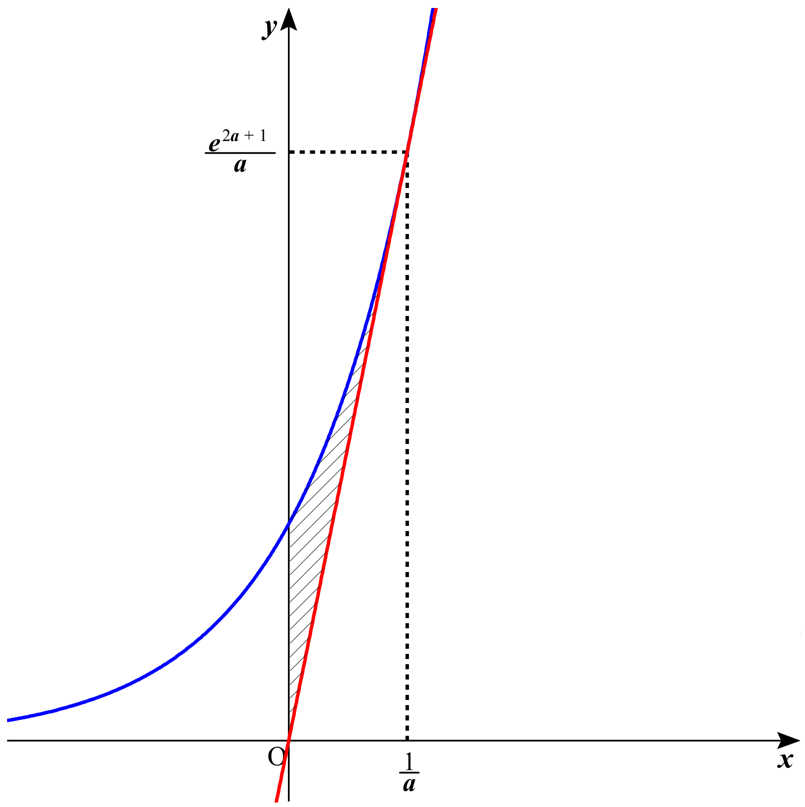
接線lは原点を通るから，$0=e^{a(t+2)}(0-t)+\dfrac{e^{a(t+2)}}{a}$　すなわち$\dfrac{e^{a(t+2)}}{a}(1-at)=0$　$\therefore t=\dfrac{1}{a}$

ゆえに，$y=e^{2a+1}x$

(2)

Sは下図斜線部の面積だから，

$$\begin{aligned}S&=\int_0^{\frac{1}{a}}\frac{e^{a(x+2)}}{a}dx-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{e^{2a+1}}{a}\\&=\frac{1}{a^2}\left[e^{a(x+2)}\right]_0^{\frac{1}{a}}-\frac{e^{2a+1}}{2a^2}\\&=\frac{e^{2a+1}-e^{2a}}{a^2}-\frac{e^{2a+1}}{2a^2}\\&=\frac{(e-2)e^{2a}}{2a^2}\end{aligned}$$



(3)

$S=\dfrac{(e-2)e^{2a}}{2a^2}$ を a で微分すると，

$$S'=\left\{\frac{(e-2)e^{2a}}{2a^2}\right\}'$$
$$=\frac{e-2}{2}\left(\frac{e^{2a}}{a^2}\right)'$$
$$=\frac{e-2}{2}\cdot\frac{2e^{2a}\cdot a^2-e^{2a}\cdot 2a}{a^4}$$
$$=(e-2)e^{2a}\cdot\frac{a-1}{a^3}$$

よって，$a>0$ における S の増減は次のようになる。

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$
S'	/	$-$	0	$+$
S	/	↓	極小	↑

よって，$a=1$ のとき S は最小値 $\dfrac{(e-2)e^2}{2}$ をとる。

199

(1)

$f(x)=ax^2+n-\dfrac{1}{2}$， $g(x)=\log x$ とおくと，

満たすべき条件は $q=f(p)=g(p)$ かつ $f'(p)=g'(p)$

$q=f(p)=g(p)$ より， $q=ap^2+n-\dfrac{1}{2}=\log p$ 　・・・①

$f'(p)=g'(p)$ より， $2ap=\dfrac{1}{p}$ すなわち $a=\dfrac{1}{2p^2}$ 　・・・②

①の $q=ap^2+n-\dfrac{1}{2}$ と②より， $q=\dfrac{1}{2p^2}\cdot p^2+n-\dfrac{1}{2}$ 　$\therefore q=n$

これと①の $q=\log p$ より， $n=\log p$ 　$\therefore p=e^n$

これを②に代入することにより， $a=\dfrac{1}{2e^{2n}}$

以上より， $a=\dfrac{1}{2e^{2n}}$， $(p,\ q)=(e^n,\ n)$

(2)

$$S_n=\int_0^{e^n}\left(\frac{1}{2e^{2n}}x^2+n-\frac{1}{2}\right)dx-\int_1^{e^n}\log x\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{6e^{2n}}x^3+\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right]_0^{e^n}-\left[x\log x-x\right]_1^{e^n}$$

$$=\frac{1}{6}e^n+\left(n-\frac{1}{2}\right)e^n-\left(ne^n-e^n+1\right)$$

$$=\frac{2e^n-3}{3}$$

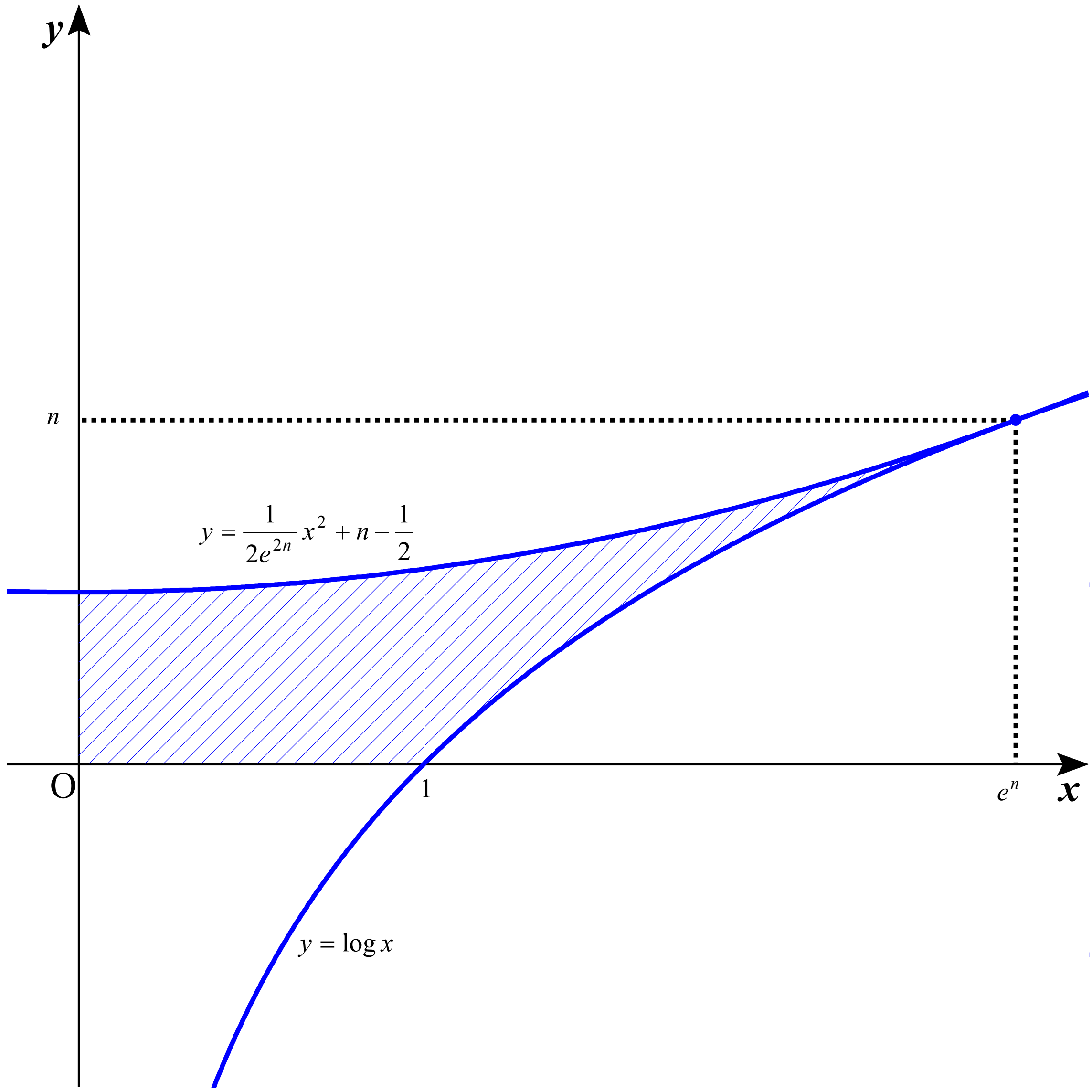
(3)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2e^{n+1}-3}{2e^n-3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2e-\dfrac{3}{e^n}}{2-\dfrac{3}{e^n}}$$

$$=e$$

参考図



200

(1)

$y=\log(x+1)$ 上の接点の座標を $(t,\ \log(t+1))$　$(0\leq t\leq e-1)$ とすると，

$y'=\dfrac{1}{x+1}$ より，接線の方程式は $y=\dfrac{1}{t+1}(x-t)+\log(t+1)$　$(0\leq t\leq e-1)$

$\therefore y=\dfrac{1}{t+1}x-1+\dfrac{1}{t+1}-\log\dfrac{1}{t+1}$　$(0\leq t\leq e-1)$

この接線は，条件より，$y=ax+b$ と一致するから，

$a=\dfrac{1}{t+1}$　・・・①

$b=-1+\dfrac{1}{t+1}+\log\dfrac{1}{t+1}$　・・・②

①を②に代入し，整理すると，　$b=a-\log a-1$

また，a がとる値の範囲を求めると，$0\leq t\leq e-1$ より，$1\leq t+1\leq e$

よって，$\dfrac{1}{e}\leq\dfrac{1}{t+1}\leq 1$　すなわち $\dfrac{1}{e}\leq a\leq 1$

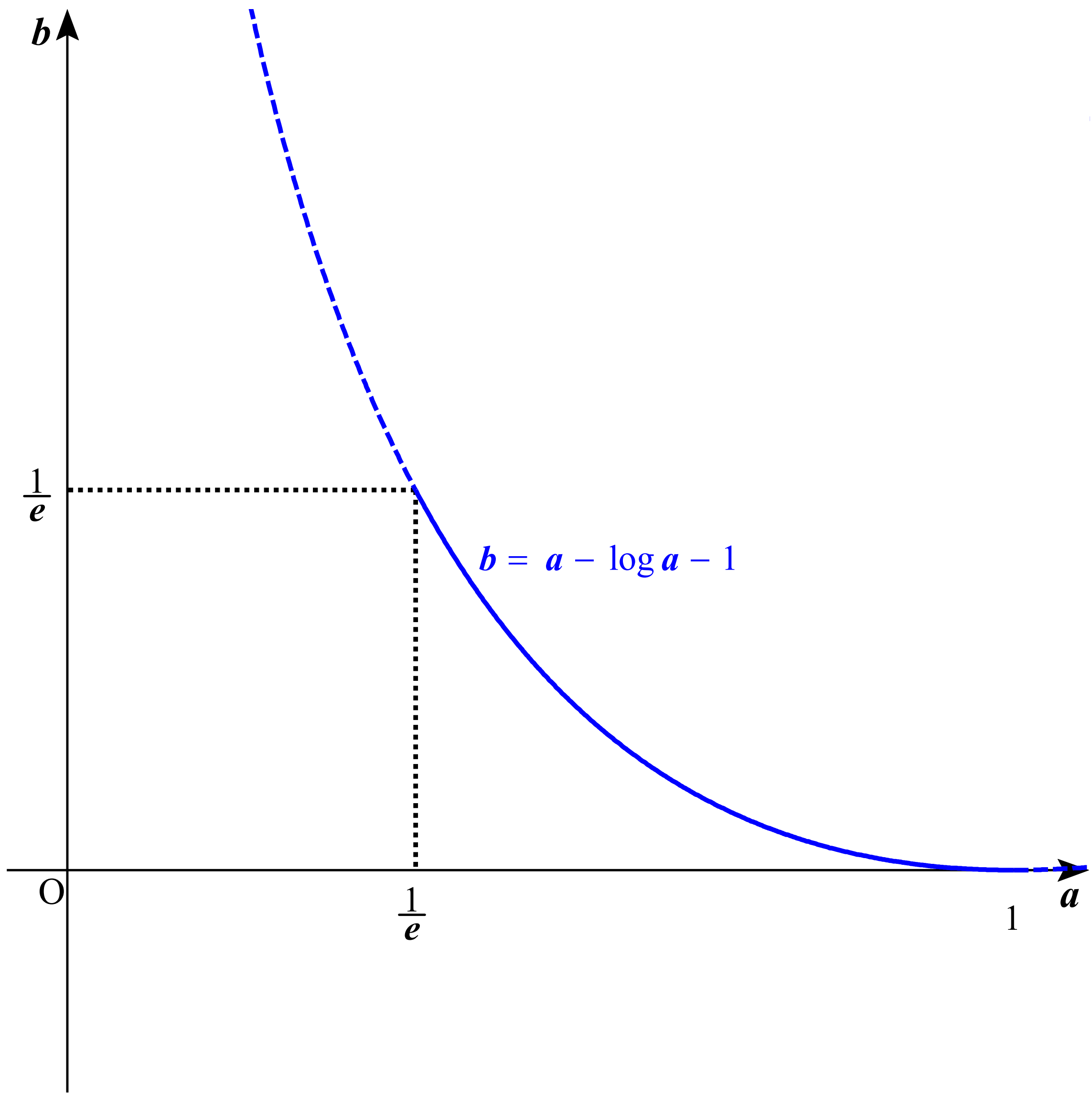
したがって，$b=a-\log a-1$　$\left(\dfrac{1}{e}\leq a\leq 1\right)$ のグラフを図示すればよい。

$b'=1-\dfrac{1}{a}\leq 0$　$\left(\because \dfrac{1}{e}\leq a\leq 1\right)$，$b''=\dfrac{1}{a^2}>0$

より，$b=a-\log a-1$　$\left(\dfrac{1}{e}\leq a\leq 1\right)$ は下に凸で単調に減少する。

また，$(a,\ b)=\left(\dfrac{1}{e},\ \dfrac{1}{e}\right),\ (1,\ 0)$

よって，次図のようになる。


b
1/e
b = a − log a − 1
O
1/e
1
a

(2)

$y=\log(x+1)$ は上に凸だから，$ax+b\geq\log(x+1)$

したがって，面積を S とすると，

$$S=\frac{b+\{a(e-1)+b\}}{2}\cdot(e-1)-\int_0^{e-1}\log(x+1)dx$$
$$=\frac{a(e-1)+2b}{2}\cdot(e-1)-\left[(x+1)\{\log(x+1)-1\}\right]_0^{e-1}$$
$$=\frac{a(e-1)+2(a-\log a-1)}{2}\cdot(e-1)-1$$
$$=\frac{e-1}{2}\cdot\{(e+1)a-2\log a-2\}-1$$

よって，$(e+1)a-2\log a-2$ が最小となるとき面積も最小となる。

ここで，$f(a)=(e+1)a-2\log a-2\ \left(\frac{1}{e}\leq a\leq 1\right)$ とおくと，

$f'(a)=e+1-\frac{2}{a}$ より，$f'(a)=0$ の解は $a=\frac{2}{e+1}$

また，$\frac{2}{e+1}-\frac{1}{e}=\frac{e-1}{e(e+1)}>0$

よって，$f(a)$ の増減は次のようになる。

a	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	$\frac{2}{e+1}$	$\cdots$	1
$f'(a)$	/	$-$	0	$+$	/
$f(a)$	$1+\frac{1}{e}$	↓	極小	↑	$e-1$

ゆえに，$f(a)$ は $a=\frac{2}{e+1}$ のとき最小値 $f\left(\frac{2}{e+1}\right)=2\log\frac{e+1}{2}$ をとる。

また，このとき

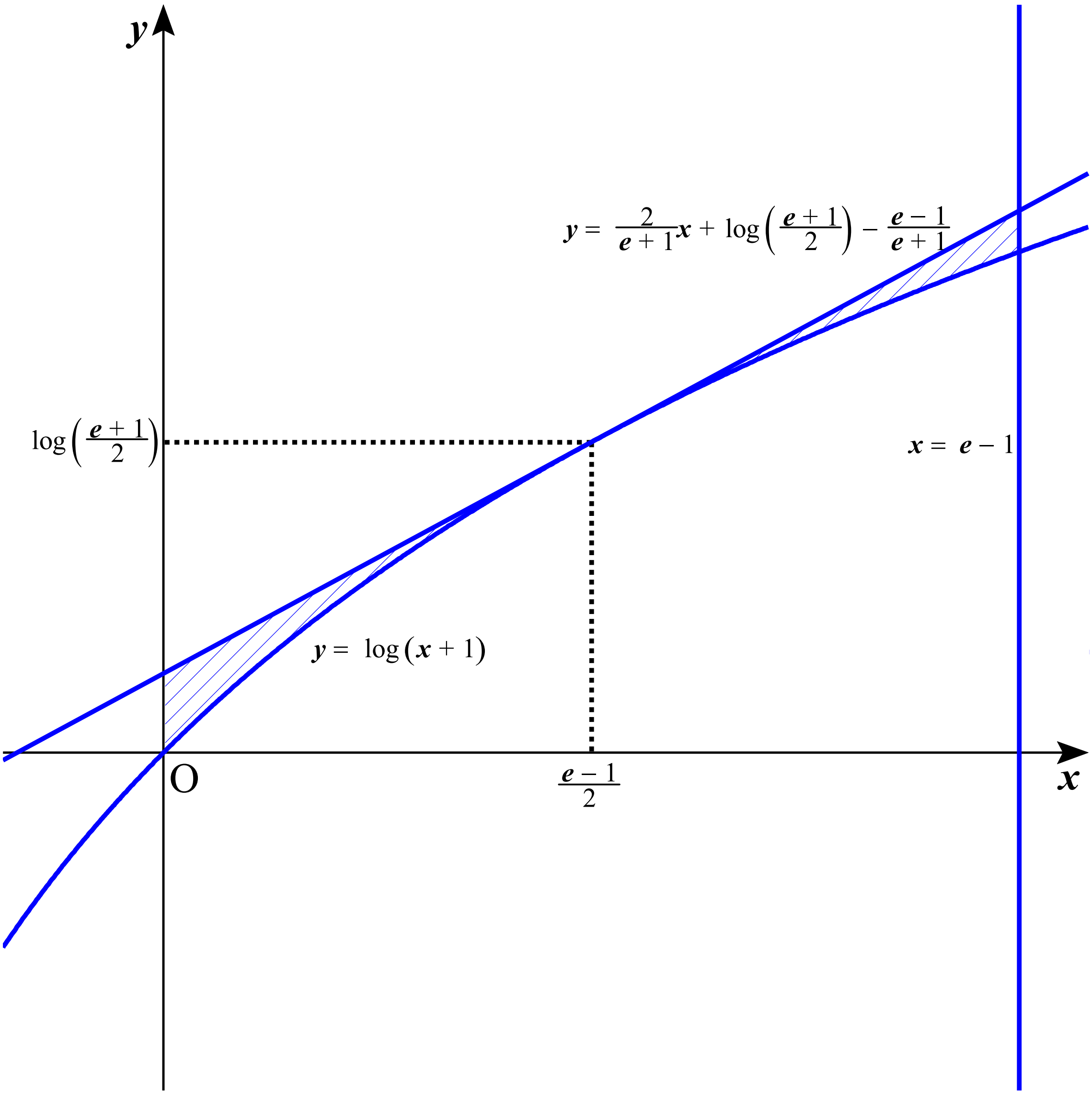
$$S=\frac{e-1}{2}\cdot 2\log\frac{e+1}{2}-1$$
$$=(e-1)\log\frac{e+1}{2}-1$$

$$b=a-\log a-1$$
$$=\frac{2}{e+1}+\log\frac{e+1}{2}-1$$
$$=\log\frac{e+1}{2}-\frac{e-1}{e+1}$$

以上より，

$(a,\ b)=\left(\frac{2}{e+1},\ \log\frac{e+1}{2}-\frac{e-1}{e+1}\right)$ のとき，面積は最小値 $(e-1)\log\frac{e+1}{2}-1$ をとる。

参考図


y
$y = \frac{2}{e+1}x + \log\left(\frac{e+1}{2}\right) - \frac{e-1}{e+1}$
$\log\left(\frac{e+1}{2}\right)$
$x = e - 1$
$y = \log(x+1)$
O
$\frac{e-1}{2}$
x

201

(1)

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ は x 軸および y 軸に関して対称だから，求める面積は $x\geq 0,\ y\geq 0$ と $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ で囲まれた部分の面積を 4 倍したものである。

解法 1

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ は $y^2=\dfrac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)$ と変形できるから，$y\geq 0$ を満たすの部分の方程式は,

$y=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ である。

よって，求める面積は $4\displaystyle\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{4b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$

ここで，$\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ は $y=\sqrt{a^2-x^2}$ （$0\leq x\leq a$）と $x\geq 0,\ y\geq 0$ で囲まれた部分の面積

すなわち円 $x^2+y^2=a^2$ と $x\geq 0,\ y\geq 0$ で囲まれた部分の面積だから，$\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{\pi a^2}{4}$

ゆえに,

$$
\begin{aligned}
4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx &= \frac{4b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx \\
&= \frac{4b}{a}\cdot\frac{\pi a^2}{4} \\
&= \pi ab
\end{aligned}
$$

補足：$\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ の別解

$x=a\sin\theta$ とおくと，$dx=a\cos\theta\,d\theta$，$x=a\Rightarrow\theta=\dfrac{\pi}{2},\ x=0\Rightarrow\theta=0$ より,

$$
\begin{aligned}
\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2\theta\,d\theta \\
&= a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta \\
&= \frac{a^2}{2}\left[\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi a^2}{4}
\end{aligned}
$$

(2)

求める面積は $\pi ab-S$ である。

S を求める。

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ・・・① と $\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$ ・・・② の共有点の座標を求めると，

①$\times a^2b^4-$②$\times a^4b^2$ より，$\left(b^2-a^2\right)\left(b^2+a^2\right)x^2=a^2b^2\left(b^2-a^2\right)$

$a\neq b$ より，$x^2=\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$　これを①に代入し，整理すると，$y^2=\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$

よって，$(x,\ y)=\left(\pm\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \pm\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right),\ \left(\pm\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \mp\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

これと①と②の対称性から，

S は $x\geq 0,\ y\geq 0,\ y\leq x$ および②で囲まれた部分の面積の 8 倍である。

また，②の $y\geq 0$ の部分は $y=\dfrac{a}{b}\sqrt{b^2-x^2}$ と表せる。

よって，

$$S=8\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{a}{b}\int_{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}^{b}\sqrt{b^2-x^2}\,dx\right)$$
$$=\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}+\frac{8a}{b}\int_{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}^{b}\sqrt{b^2-x^2}\,dx$$

ここで，$\displaystyle\int_{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}^{b}\sqrt{b^2-x^2}\,dx$ について，

$x=b\sin\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$\sqrt{b^2-x^2}=b\cos\theta$，$dx=b\cos\theta$，

$x=b$ のとき $\theta=\dfrac{\pi}{2}$，$x=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ のとき $\sin\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\alpha$ より，$\theta=\alpha$

よって，

$$\int_{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}^{b}\sqrt{b^2-x^2}\,dx=\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}b^2\cos^2\theta\,d\theta$$
$$=b^2\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta$$
$$=\frac{b^2}{2}\left[\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{b^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\frac{\sin 2\alpha}{2}\right)$$

$$=\frac{b^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\sin\alpha\cos\alpha\right)$$
$$=\frac{b^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$
$$=\frac{b^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\frac{ab}{a^2+b^2}\right)$$

よって，

$$S=\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}+\frac{8a}{b}\int_{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}^{b}\sqrt{b^2-x^2}\,dx$$
$$=\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}+\frac{8a}{b}\cdot\frac{b^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\frac{ab}{a^2+b^2}\right)$$
$$=2ab(\pi-2\alpha)$$

ゆえに，$\pi ab-S=(4\alpha-\pi)ab$

(3)

$$T=\pi ab+\pi ab-S$$
$$=2\pi ab-S$$

および$T=2S$ より，$2\pi ab=3S$

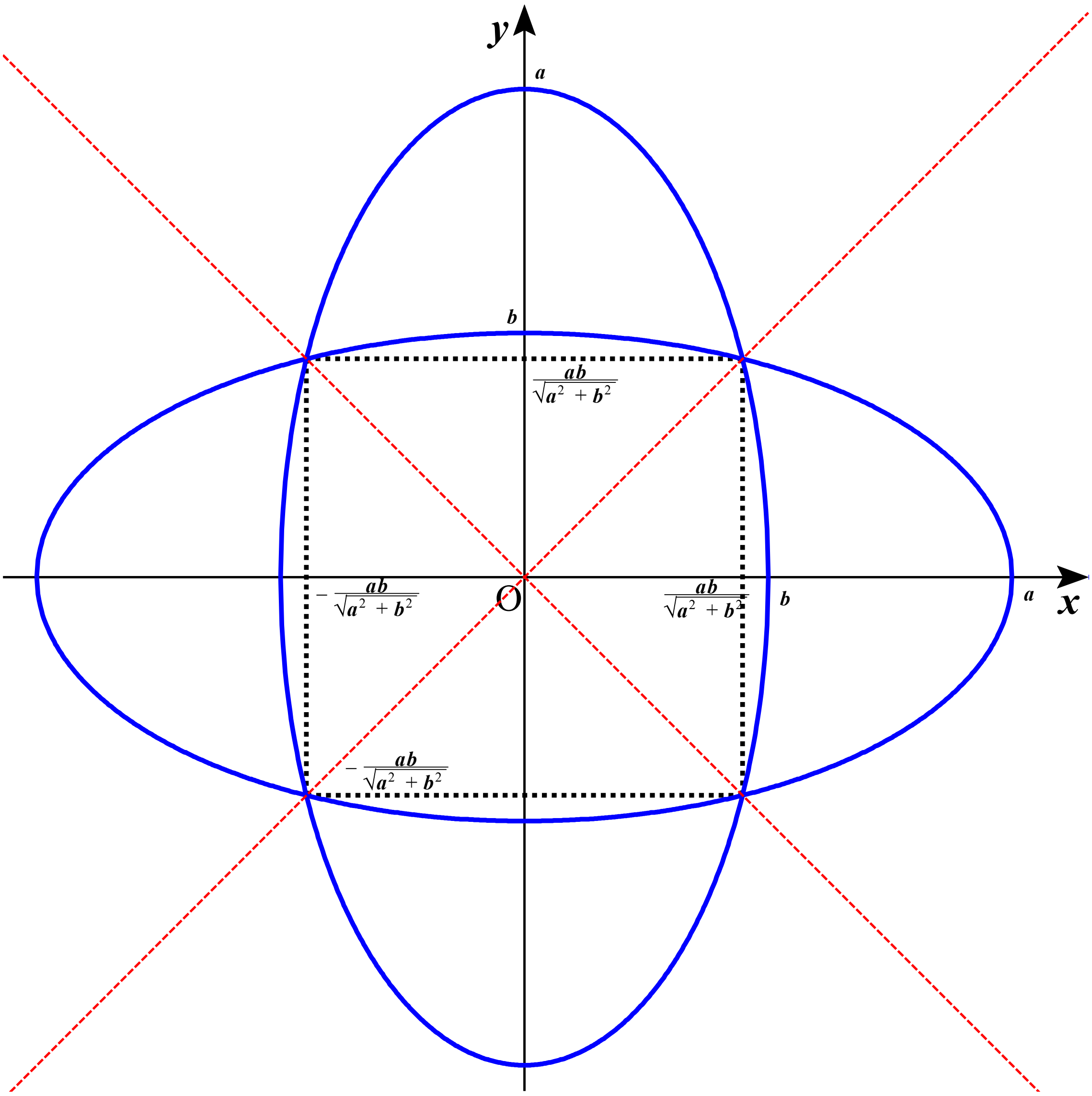
これと $S=2ab(\pi-2\alpha)$ より，$2\pi ab=6ab(\pi-2\alpha)$　$\therefore\alpha=\dfrac{\pi}{3}$

よって，$\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

これより，$\dfrac{a}{b}=\tan\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

ゆえに，$\dfrac{b}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

参考図


y
a
b
$\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$
$-\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$
O
$\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$
b
a
x
$-\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$